الوحدة الثانية: دوال كثيرات الحدود

تمارين (١ - ٤)

أولا: أكمل ما يأتي:

١) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص= ٢ س - ١ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقط.

الحل: لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نعوض س=صفر

د(س)= ٢ × ٠ - ١ = - ١ ⟵ **النقطة** (٠، -١) هي نقطة تقاطع مع محور الصادات

٢) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة ص = ٣ س +٦ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة س.

الحل: لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نعوض ص=صفر

٠ = ٣س+٦ ⟵ س= -٢ ⟵ **النقطة** (-٢، ٠) هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات

٣) إذا كانت النقطة (أ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ع ← ع حيث د(س) = ٤ س – ٥ فإن أ تساوي؟

الحل: النقطة (أ، ٣) تقع على الخط المستقيم ⟵ (تحقق الدالة) ⟵ س=أ، ص=٣ ⟵

ثانيا: ٣= ٤أ – ٥ ⟵ ٤أ = ٨ ⟵ **أ = ٢**

١) إذا كان د : ع ← ع ، اذكر درجة د ثم أوجد د (٢٠) ، د (٠) ، د $(\frac{١}{٢})$ حيث:

أ) د (س) = ٣ ب) د (س) = ٣ - ٢ س ج) د (س) = س^{٢} - ٤ .

٢) مثل بيانيا الدوال الخطية الآتية، وأوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محوري الإحداثيات:

أ) د (س) = ٢ س ب) د (س) = $-\frac{١}{٢}$ س جـ) د (س) = ٢ س +١

د) د (س) = ٢ – س هـ) د (س) = ٣س - ١ و) د (س) = - ٢ س + ٣

٣) مثل بيانيا كلاً من الدوال الآتية، ومن الرسم استنتج إحداثي رأس المنحنى، ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

أ) د (س) = س^{٢} - ٢ متخذاً س ∈ [-٣ ، ٣]

ب) د(س) = (س - ٢)^{٢} متخذاً س ∈ [- ١، ٥]

جـ) د (س) = س ^{٢} + ٢ س + ١ متخذاً س ∈ [- ٢،٤]

د) د (س) = ٢ - س^{٢} متخذاً س ∈ [- ٣ ، ٣].

- الرابط بالتكنولوجية .

استخدام برامج الحاسوب:

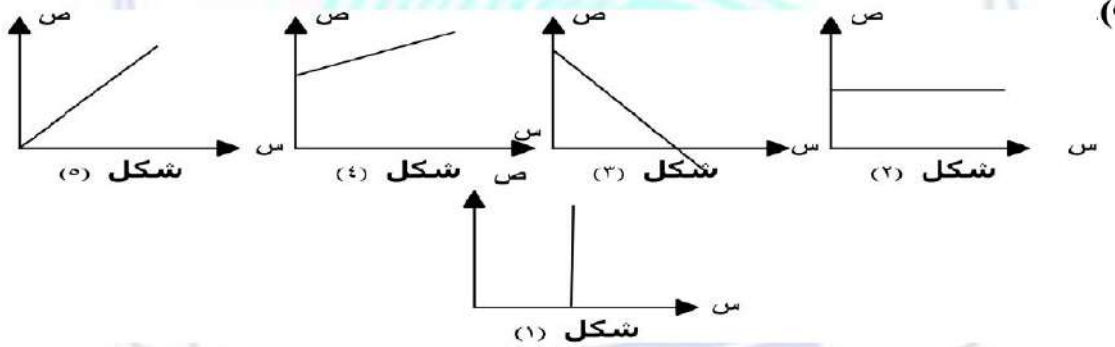
- توجد العديد من البرامج المجانية لرسم المنحنيات وحل المعادلات، وهي متوفرة على الشبكة العنكبوتية ومنها البرنامج المجاني: الرياضيات للجميع (GeoGebra) وموقعه على الشبكة: http://www.geogebra.org والبرنامج يدعم باللغة العربية.
- باستخدام البرنامج مثل بيانيا كلاً من الدوال الآتية:

أ) د (س) = ٢ س + ١ ب) د (س) = ٥ - ٣ س

ج) د (س) = س٢ - ٣ س + ٢ (د) د (س) = ٤ - ٣ س – س٢ .

- نشاط

١)شركة لرصف الرطق تتقاضي ١٠٠٠٠٠ جنيه (رسم ثابت) ثم ٣٠ جنيها لكل متر شركة لرصف الطرق تتقاضى . فإذا كان س (طول الطريق المرصوف بالأمتار)، ص (التكلفة الكلية التي تأخذها الشركة بالجنيهات)



أولا: الشكل الذي يمثل العلاقة بين س ، ص هو الشكل رقم .....

ثانيا : أي من العلاقات الآتية تمثل المعلومات السابقة:

أ) ص=٣٠س ب) ص = ٣٠ س +١٠٠٠٠٠

ج) ص = ١٠٠٠٠٠س+٣٠ د) ص= ٣٠٠٠٠٠٠س.

ثالثا : اكتب مقالاً تتناول فيه مدى جهود الدولة في تطوير ورصف الطرق حتى تكون سريعة وآمنة، وما - ينبغي عليك من اتباع تعليمات المرور في السير والمحافظة على نظافة وسلامة هذه الطرق.

نلهمك لتبدع ....!

ـاختبار الوحدة .

إذا كانت س = {٠، ١، ٤، ٧}، ص = {١، ٣، ٥، ٦} ، ع علاقة من س إلى ص، حيث أ ع ب تعني: « أ + ب «٦» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني. هل ع دالة؟ اذكر السبب.

مثل بيانيا كلاً من الدوال الآتية:

أ) د (س) = ٣ س ـ ١ ب) د (س) = ـ ٢ س

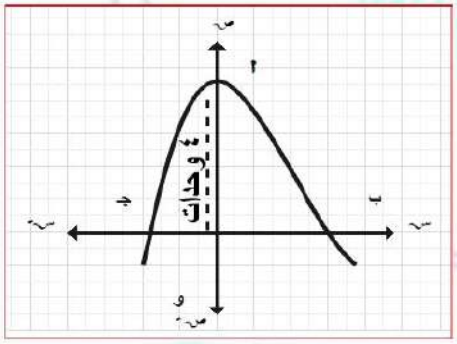
ج) د (س) = س٢ ـ ٣ متخذاً س ∈ [ـ ٣ ، ٣]

د) د (س) = ١ ـ ٣ س + س متخذاً س ∈ [ـ١ ، ٤]

ـأثناء قراءة كريم لكتاب وجد أنه بعد ٣ ساعات تبقى له ٥٠ صفحة، وبعد ٦ ساعات تبقى له ٢٠ صفحة. فإذا كانت العلاقة بين الزمن (ن) وعدد الصفحات (ص) علاقة خطية: مثل العلاقة بين ن ، ص بيانيا ثم أوجد العلاقة الجبرية بينهما. ما الوقت الذي ينتهي فيه كريم من قراءة الكتاب ؟ كم عدد صفحات الكتاب المتبقية عندما بدأ كريم القراءة؟

٤) شكل المقابل: يمثل منحنى الدالة د حيث:

د (س) = م ـ س٢ ، إذا كان أ و = ٤ وحدات



أوجد:

ـ قيمة م

ـ إحداثيي ب، جـ

ـ مساحة المثلث الذي رؤوسه أ، ب، جـ

الحل: أ ∈ لمحور الصادات ⟵ أ = (٠،٤) ⟵

أ ∈ لمنحنى الدالة ⟵ (٠،٤) تحقق الدالة ⟵ ٤ = م ـ (٠)٢ ⟵ م = ٤ ⟵

د(س) = ٤ ـ س٢

س تقع على محور السينات ⟵ ب= (س،٠) ⟵ ب ∈ لمنحنى الدالة ⟵ ٠ = ٤ ـ س٢

⟵ س٢ = ٤ ⟵ س= ±٢ ⟵ ب = (٠،٢)، جـ = (٠،٢-)

مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أ و = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ = ٨ وحدة تربيعية

الوحدة الثانية: النسبة والتناسب والتغير الطردي والتغير العكسي النسبة

تمارين (٢ - ١)

١) عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧، إذا طرح من كل منهما وأصبحت النسبة بينهما ١ : ٣؛ أوجد العددين؟

الحل: نفرض العددان: ٣س، ٧س ← $\frac{٣س - ٥}{٧س - ٥} = \frac{١}{٣}$ ← ٩س - ١٥ = ٧س - ٥ ←

٢س = ١٠ ← س=٥ ← العددان هما ١٥، ٣٥

٢)عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣، وإذا أضيف للأول ٧ وطرح من الثاني ١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ ؛ أوجد العددين؟

الحل: نفرض العددان: ٢س، ٣س ← $\frac{٢س + ٧}{٣س - ١٢} = \frac{٥}{٣}$ ← ٦س + ٢١ = ١٥س - ٦٠ ←

٩س = ٨١ ← س=٩ ← العددان هما ١٨، ٢٧

٣) أوجد العدد الذي إذا طرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$ فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$

الحل: نفرض أن العدد = س ← ثلاثة أمثاله = ٣س ← $\frac{٤٩ - ٣س}{٦٩ - ٣س} = \frac{٢}{٣}$ ←

١٤٧ - ٩س = ١٣٨ - ٦س ← س=٣ ← العدد هو ٣

٤) أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

الحل: نفرض أن العدد = س ← مربعه = $س^{٢}$ ← $\frac{٧ + س^{٢}}{١١ + س^{٢}} = \frac{٤}{٥}$ ←

$٣٥ + ٥س^{٢} = ٤٤ + ٤س^{٢}$ ← $س^{٢} = ٩$ ← س= ± ٣ ← العدد هو ٣ أو -٣

٥) أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل: نفرض أن العدد = س ← مربعه = $س^{٢}$ ← $\frac{٥ + س^{٢}}{١١ + س^{٢}} = \frac{٣}{٥}$ ←

$٢٥ + ٥س^{٢} = ٣٣ + ٣س^{٢}$ ← $س^{٢} = ٤$ ← س= ± ٢ ← العدد هو ٢

التناسب

١) إذا كانت ص؛ ع ؛ ل كميات متناسبة فأثبت أن:

أ) $\left(\frac{س + ص}{ع + ل}\right)^{٢} = \frac{٢س^{٢} - ٣ص^{٢}}{٢ع^{٢} - ٣ل^{٢}}$

ب) $\sqrt{\frac{٥س^{٢} - ٣ع^{٢}}{٥ص^{٣} - ٣ل}} = \frac{س + ع}{ص + ل}$

$\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل} = م \longleftarrow س = ص م ،\ ع = ل م$

الحل: أ) الطرف الأيمن $= \left(\frac{س + ص}{ع + ل}\right)^{٢} = \left(\frac{ص م + ص}{ل م + ل}\right)^{٢} = \left(\frac{ص (م + ١)}{ل (م + ١)}\right)^{٢} = \frac{ص^{٢}}{ل^{٢}}$ ← ①

الطرف الأيسر $= \frac{٢س^{٢} - ٣ص^{٢}}{٢ع^{٢} - ٣ل^{٢}} = \frac{٢ص^{٢} م^{٢} - ٣ص^{٢}}{٢ل^{٢} م^{٢} - ٣ل^{٢}} = \frac{ص^{٢}(٢م^{٢} - ٣)}{ل^{٢}(٢م^{٢} - ٣)} = \frac{ص^{٢}}{ل^{٢}}$ ← ②

الطرفان متساويان ① = ②

ب) الطرف الأيمن $= \sqrt[٣]{\frac{٥س^{٢} - ٣ع^{٢}}{٥ص^{٣} - ٣ل}} = \sqrt[٣]{\frac{٥ص^{٣} م^{٣} - ٣ل^{٣} م^{٣}}{٥ص^{٣} - ٣ل^{٣}}} = \sqrt[٣]{\frac{م^{٣}(٥ص^{٣} - ٣ل^{٣})}{(٥ص^{٣} - ٣ل^{٣})}}$ ←

$= \sqrt[٣]{م^{٣}} = م \longleftarrow$ ①

الطرف الأيسر $= \frac{س + ع}{ص + ل} = \frac{ص م + ل م}{ص + ل} = \frac{م(ص + ل)}{(ص + ل)} = م \longleftarrow$ ②

الطرفان متساويان ① = ②

٢) إذا كانت $\frac{س}{٣} = \frac{س}{٤} = \frac{ع}{٥}$ كميات متناسبة فأثبت أن:

أ) $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{١}{٢}$ ب) $\sqrt{٣س^{٢} + ٣ص^{٢} + ع^{٢}} = ٢س + ص$

س = ٣م، ص = ٤م، ع = ٥م

الحل: أ) الطرف الأيمن $= \frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{٢ \times ٤م - ٥م}{٣ \times ٣م - ٢ \times ٤م + ٥م} = \frac{٨م - ٥م}{٩م - ٨م + ٥م}$ ←

$= \frac{٣م}{٦م} =$ الطرف الأيسر $= \frac{١}{٢}$

ب) الطرف الأيمن $= \sqrt[٢]{٣س^{٢} + ٣ص^{٢} + ع^{٢}} = \sqrt[٢]{٣(٣م)^{٢} + ٣(٤م)^{٢} + (٥م)^{٢}}$ ←

$= \sqrt[٢]{٢٧م^{٢} + ٤٨م^{٢} + ٢٥م^{٢}} = \sqrt[٢]{١٠٠م^{٢}} = ١٠م \longleftarrow$ ①

الطرف الأيسر $= ٢س + ص = ٢(٣م) + ٤م = ٦م + ٤م = ١٠م \longleftarrow$ ②

الطرفان متساويان ① = ②

٣) إذا كانت ص أ ؛ ب ؛ جـ ؛ د كميات متناسبة فأثبت أن:

أ) $\left(\frac{أ-جـ}{ب-د}\right)^{٢}=\frac{أ جـ}{ب د}$ ب) $\frac{أ+جـ}{ب+د}=\sqrt[٣]{\frac{٥أ^{٣}-٣جـ^{٣}}{٥ب^{٣}-٣د^{٣}}}^{٢}$

$\frac{أ}{ب}=\frac{جـ}{د}=م$ ⟵ أ = ب م، جـ = د م

الحل: أ) الطرف الأيمن $=\frac{أ جـ}{ب د}=\frac{ب م \times د م}{ب د}=\frac{ب د \times م^{٢}}{ب د}=م^{٢}$ ⟵ (١)

الطرف الأيسر $=\left(\frac{أ-جـ}{ب-د}\right)^{٢}=\left(\frac{ب م-د م}{ب-د}\right)^{٢}=\left(\frac{م(ب-د)}{(ب-د)}\right)^{٢}=(م)^{٢}=م^{٢}$ ⟵ (٢)

الطرفان متساويان (١) = (٢)

ب) الطرف الأيمن $=\sqrt[٣]{\frac{٥أ^{٣}-٣جـ^{٣}}{٥ب^{٣}-٣د^{٣}}}=\sqrt[٣]{\frac{٥ب^{٣}م^{٣}-٣د^{٣}م^{٣}}{٥ب^{٣}-٣د^{٣}}}=\sqrt[٣]{\frac{م^{٣}(٥ب^{٣}-٣د^{٣})}{(٥ب^{٣}-٣د^{٣})}}$ ⟵

$=\sqrt[٣]{م^{٣}}=م$ ⟵ (١)

الطرف الأيسر $=\frac{أ+جـ}{ب+د}=\frac{ب م+د م}{ب+د}=\frac{م(ب+د)}{(ب+د)}=م$ ⟵ (٢)

الطرفان متساويان (١) = (٢)

٤) إذا كانت ب هي الوسط المتناسب بين أ، جـ فأثبت أن:

أ) $\frac{أ^{-١}+جـ^{-١}}{أ^{-١}+ب^{-١}+جـ^{-١}}=ب^{٢}$ ب) $\frac{جـ^{٢}}{ب^{٢}}=\frac{جـ}{أ}=\frac{٢جـ-٢ب^{٢}ب^{٢}}{٢ب^{٢}+٣أ^{٢}}$

$\frac{أ}{ب}=\frac{ب}{جـ}=م$ ⟵ ب = جـ م، أ = جـ م^٢

الحل: أ) الطرف الأيمن $=\frac{أ+ب+جـ}{أ^{-١}+ب^{-١}+جـ^{-١}}=\frac{أ+ب+جـ}{\frac{١}{أ}+\frac{١}{ب}+\frac{١}{جـ}}=\frac{أ+ب+جـ}{\frac{ب جـ+جـ أ+أ ب}{أ ب جـ}}=$ ⟵

$=(أ+ب+جـ)\times\frac{أ ب جـ}{ب جـ+جـ أ+أ ب}=(جـ م^{٢}+جـ م+جـ)\times\frac{جـ^{٣}م^{٣}}{جـ^{٢}م^{٢}+جـ^{٢}م^{٢}+جـ^{٢}م^{٣}}$ ⟵

$=جـ(م^{٢}+م+١)\times\frac{جـ^{٣}م^{٣}}{جـ^{٢}م(١+م+م^{٢})}=جـ^{٢}م^{٢}$ ⟵ (١)

الطرف الأيسر $=ب^{٢}=جـ^{٢}م^{٢}$ ⟵ (٢)

الطرفان متساويان (١) = (٢)

ب) الطرف الأيمن $= \frac{٢جـ^{٢} - ٣ب^{٢}}{٢ب^{٢} - ٣أ^{٢}} = \frac{٢جـ^{٢} - ٣جـ^{٢} م^{٢}}{٢جـ^{٢} م^{٢} - ٣جـ^{٢} م^{٤}} = \frac{جـ^{٢}(٢ - ٣م^{٢})}{جـ^{٢} م^{٢}(٢ - ٣م^{٢})} = \frac{١}{م^{٢}}$ ← ①

الطرف الأوسط $= \frac{جـ}{أ} = \frac{جـ}{ج م^{٢}} = \frac{١}{م^{٢}}$ ← ②

الطرف الأيسر $= \frac{ج^{٢}}{ب^{٢}} = \frac{جـ^{٢}}{جـ^{٢} م^{٢}} = \frac{١}{م^{٢}}$ ← ③

الطرف الأيمن = الطرف الأوسط = الطرف الأيسر ① = ② = ③

٥) إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل؛ فأثبت أن:

أ) $\frac{أ^{٢}-جـ د}{ب^{٢}-جـ^{٢}} = \frac{أ+جـ}{ب}$

ب) $\frac{أ^{٢}-٣جـ^{٢}}{ب^{٢}-٣د^{٢}} = \frac{ب}{د}$

ج) $\frac{أ}{ب+د} = \frac{جـ^{٣}}{جـ^{٢}د+د^{٣}}$

د) $\frac{ب د}{أ} = \frac{جـ^{٢}-د^{٢}}{جـ-أ}$

٦) إذا كانت: ٥أ، ٦ب، ٧جـ، ٨د كميات موجبة في تناسب متسلسل فأثبت أن: $\sqrt[٣]{\frac{٥أ}{٨د}} = \sqrt{\frac{٥أ+٦ب}{٧جـ+٨د}}$

$\frac{٥أ}{٦ب} = \frac{٦ب}{٧جـ} = \frac{٧جـ}{٨د} = م$ ← ٧جـ = ٨د م، ٦ب = ٨د م^{٢}، ٥أ = ٨د م^{٣}

الحل: الطرف الأيمن $= \sqrt[٣]{\frac{٥أ}{٨د}} = \sqrt[٣]{\frac{٨د م^{٣}}{٨د}} = \sqrt[٣]{م^{٣}} = م$ ← ①

الطرف الأيسر $= \sqrt{\frac{٥أ + ٦ب}{٧جـ + ٨د}} = \sqrt{\frac{٨د م^{٣} + ٨د م^{٢}}{٨د م + ٨د}} = \sqrt{\frac{٨د م^{٢}(م + ١)}{٨د (م + ١)}} = \sqrt{م^{٢}} = م$ ← ②

الطرفان متساويان ① = ②

٧) إذا كان $\frac{ص}{س-ع} = \frac{س}{ص} = \frac{س+ع}{ع}$ فأثبت أن كلا من هذه النسب يساوي ٢ (ما لم تكن: س + ص = ٠)

ثم أوجد س: ص : ع

الحل: بجمع حدود النسب الثلاث

$\frac{ص + س + س + ص}{س - ع + ص + ع} =$ احدى النسب ← $\frac{٢س + ٢ص}{س + ص} =$ احدى النسب ← $\frac{٢(س + ص)}{(س + ص)} =$ احدى النسب

← ٢ = احدى النسب

$\frac{ص}{س ع} = \frac{س}{ص} = \frac{س + ص}{ع} = ٢$ ← س = ٢ص ← س + ص = ٢ع ← ٣ص = ٢ع ←

$\frac{ص}{ع} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{١}$ ⟵ س : ص : ع ⟵ **س : ص : ع**

٤ : ٢ : ٣

٣ : ٢ : ٤

٨) إذا كان $\frac{١}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{ب}{٤} = \frac{٢أ + ب + ٥جـ}{٣س}$ فأوجد قيمة س

الحل: بضرب حدود النسب الثانية × (-١) والثالثة × (٥) والأولى × (٢) وبجمع النسب الثلاث

$\frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٤ - ٣ + ٢٠}$ = احدى النسب ⟵ $\frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٢١}$ = احدى النسب ⟵ $\frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٢١} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٣س}$

⟵ ٣س = ٢١ ⟵ س = ٧

٩) إذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان أ + ب = ٢٧,٦ فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ

الحل: أ = ٥م، ب = ٧م، جـ = ٣م ⟵ ٥م + ٧م = ٢٧,٦ ⟵ ١٢م = ٢٧,٦ ⟵ م = ٢,٣

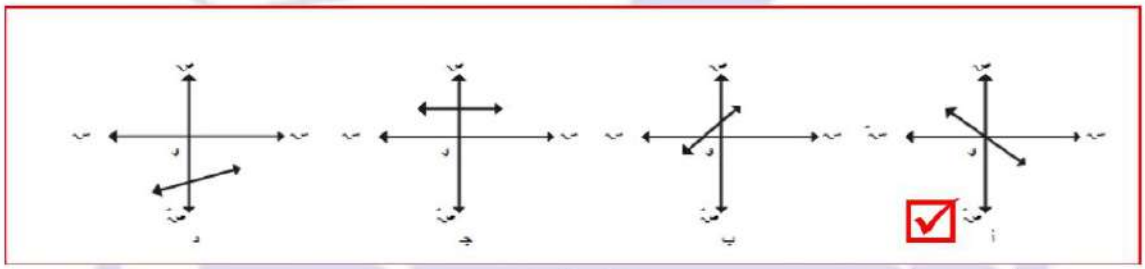
⟵ أ = ١١,٥ ، ب = ٦,٩ ، جـ = ١٦,١

التغير الطردي و التغير العكسي

تمارين (٢ - ٣)

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

١) أي من الأشكال البيانية الأتية تمثل تغيرا طرديا بين س، ص:



التوضيح: العلاقة الطردية تمثل مستقيم يمر بنقطة الأصل

٢) العلاقة التي تمثل تغيرا طرديا بين المتغيرين ص

أ) س ص = ٥ ب) ص = س + ٣ ج) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ د) $\frac{ص}{٢} = \frac{س}{٥}$ ☑

التوضيح: إذا كان خارج قسمة المتغيرين = ثابت أي عدد فإن العلاقة تكون طردية

وإذا كان حاصل ضرب المتغيرين = ثابت فإن العلاقة عكسية

٣) إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت س = $\sqrt[3]{٨}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt[3]{٨}}$ فإن ثابت التناسب يساوي:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) ٢ ☑ د) ٦

التوضيح: ص $\propto \frac{١}{س}$ ⟵ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

ص = $\frac{م}{س}$ ⟵ $\frac{٢}{\sqrt[3]{٨}} = \frac{م}{٣}$ ⟵ م = ٢

ثانيا: (الحساب العقلي): من بيانات الجدول التالي أجب عن الأسئلة الآتية:

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

أ) بين نوع التغير بين ص، س ب) أوجد ثابت التناسب

ج) أوجد قيمة ص عندما س = ٣ د) أوجد قيمة س عندما ص = $\frac{٢}{٥}$ ٢

الحل: من ملاحظة بيانات الجدول تلاحظ أن:

أ ⟵ العلاقة عكسية ⟵ ثابت = حاصل الضرب ⟵ لجميع قيم س، ص ⟵ س ص = ١٢

ب ⟵ ثابت التناسب = ١٢ ⟵ ص $\propto \frac{١}{س}$

ج ⟵ ص = ٤ ⟵ $\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{ص_٢}$ ⟵ $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

د ⟵ س = ٥ ⟵ $\frac{١٢}{س}$ = ٢ $\frac{٢}{٥}$ ⟵ ص = $\frac{١٢}{س}$

تمارين عامة على الوحدة

١) إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتناسب طرديا مع عدد المشتركين س؛ فاختر الإجابة الصحيحة:

أ) ص = أ س　　ب) ص = $\frac{أ}{س}$

ج) ص = أ + $\frac{م}{س}$ (م ثابت ≠ ٠)　　د) ص = أ + م س (م ثابت ≠ ٠) ☑

٢) إذا كان ص ∝ س عندما س = ٤٠ ، ص = ١٤ فأوجد س عندما ص = ٨٠

الحل: ص ∝ س ⟵ $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ ⟵ $\frac{٤٠}{٨٠} = \frac{١٤}{س}$ ⟵ س = ٢٨

٣) تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديا مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلو مترا في ٦ ساعات؛ فكم كيلو مترا تقطعها السيارة في ١٠ ساعات؟

الحل: ف ∝ ن ⟵ $\frac{ف_1}{ف_2} = \frac{ن_1}{ن_2}$ ⟵ $\frac{١٥٠}{ف_2} = \frac{٦}{١٠}$ ⟵ ف٢ = ٢٥٠ كم

٤) إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديا مع وزنه على الأرض (ر) ، وإذا كان الجسم يزن ٨٤ كيلو جرامًا على الأرض، ووزنه ١٤ كيلو جرامًا على القمر؛ فماذا يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كيلو جرامًا؟

الحل: و ∝ ر ⟵ $\frac{و_1}{و_2} = \frac{ر_1}{ر_2}$ ⟵ $\frac{١٤}{و_2} = \frac{٨٤}{١٤٤}$ ⟵ و٢ = ٢٤ كغم

٥) إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ١٦

٦) إذا كانت أ، ب، ج، د، في تناسب متسلسل فأثبت أن:

أ) $\frac{أ^2 - ٣ج^2}{ب^2 - ٣د^2} = \frac{ب}{د}$　　ب) $\frac{٢أ^3 - ٣ب^3}{٣أ^3 - ٤ب^3} = \frac{٢أ^2 - ٣د^2}{٣أ^2 - ٤د^2} = \frac{ب}{د}$

٧) إذا كان $\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{٢ب + جـ} = \frac{ع}{٢جـ + أ}$ فأثبت ان $\frac{٣س + ٢ص + ع}{٦جـ + ٤أ} = \frac{٢س + ص}{٤ب - جـ}$

الحل: بضرب حدي النسبة الأولى × (٢) وجمع النسبة الأولى والثانية

$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٢ب - جـ} = \frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ}$ = احدى النسب

بضرب حدي النسبة الثانية × (٢) والأولى × (٢) وجمع النسب الثلاث

$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٤أ + ٢ب + ٤ب - ٢جـ + ٢جـ - أ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$

$$\frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب} = \text{احدى النسب}$$

$$\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$$ وهو المطلوب

٨) الربط بالهندسة: س، ص، ع أطوال ثلاثة أضلاع متناسبة في مثلث وكان س + ص = ١٥ سم، ص + ع = ٢٢,٥ سم؛ فأوجد س : ص

الحل: س، ص، ع متناسبة $\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = م$ ⟵ س = ع م^{٢}، ص = ع م

س + ص = ١٥ ⟵ ع م^{٢} + ع م = ١٥ ⟵ ع م (م + ١) = ١٥ ⟵ ①

ص + ع = ٢٢,٥ ⟵ ع م + ع = ٢٢,٥ ⟵ ع (م + ١) = ٢٢,٥ ⟵ ②

بقسمة معادلة ① على معادلة ②

$$\frac{ع م (م + ١)}{ع (م + ١)} = \frac{١٥}{٢٢,٥} \longleftarrow م = \frac{٢}{٣}$$

بتعويض قيمة م في معادلة ②: ع $(\frac{٢}{٣} + ١)$ = ٢٢,٥ ⟵ ع = $\frac{٢٧}{٢}$ ⟵ ص = ٩، س = ٦

س : ص

٦ : ٩

٢ : ٣

٩) تطبيقات حياتية: في مجال اهتمام الدولة بالريف المصري، رصدت الدولة مبلغ ١,٨٥ × ١٠^{٦} جنيه لإحدى القرى لبناء مدرسة، ووحدة صحية ومركز شباب، فإذا كانت تكاليف المدرسة $\frac{٣}{٢}$ من تكاليف الوحدة الصحية، وتكاليف الوحدة الصحية $\frac{٥}{٦}$ من تكاليف مركز الشباب؛ فما هي تكاليف كل منها؟

الحل: المدرسة : الوحدة : مركز الشباب

٣ : ٢ : ٦

٢ ↓ ٥

١٥ : ١٠ : ١٢

المدرسة : الوحدة : مركز الشباب : المجموع

١٥ : ١٠ : ١٢ : ٣٧

ع : س : ص : ١,٨٥ × ١٠^{٦}

تكاليف المدرسة = $\frac{١٥ \times ١,٨٥ \times ١٠^{٦}}{٣٧}$ وهكذا .....

١٠) تطبيقات حياتية: إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسيًا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل، فإذا أنجز العمل ٦ عمال في أربع ساعات، فما الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل؟

نشاط

(حساب عقلي) من بيانات الجدول الآتي: أجب عن الأسئلة الآتية:

س	٣	٨	٦	١٢
ص	٨	٣	٤	٢

أ) بين مع ذكر السبب أن التغير بين س، ص تغير عكسي

ب) اكتب ثابت التغير ج) اكتب العلاقة بين س ، ص.

د) أوجد قيمة ص عندما س = ٤٨ هـ) أوجد قيمة س عندما ص = ١٢

٢) إذا كانت نسبة النجاح في إحدى المحافظات للشهادة الإعدادية هي ٨٣ ٪ وكانت نسبة النجاح للبنين ٧٩ ٪، ونسبة النجاح للبنات ٨٩ ٪ فأوجد.

أولا: نسبة النجاح بين عدد البنين إلى عدد البنات في هذه المحافظة.

ثانيا: النسبة بين عدد البنين و عدد البنات في هذه المحافظة.

اختبار الوحدة

١) إذا كان $\frac{أ+ب}{٣} = \frac{ب+جـ}{٦} = \frac{جـ+أ}{٥}$ فاثبت ان: $\frac{أ+ب+جـ}{أ} = ٧$

الحل: بجمع حدود النسب الثلاث

$$\frac{٢أ + ٢ب + ٢جـ}{١٤} = \frac{٢(أ + ب + جـ)}{١٤} = \frac{أ + ب + جـ}{٧} = \text{احدى النسب}$$

بضرب النسبة الثانية × (-١) وجمع النسب الثلاث

$$\frac{أ + ب - ب - جـ + أ}{٣ - ٦ + ٥} = \frac{٢أ}{٢} = \frac{أ}{١} = \text{احدى النسب}$$

$$\frac{أ + ب + جـ}{٧} = \frac{أ}{١} \longleftarrow \frac{أ + ب + جـ}{أ} = \frac{٧}{١} = ٧$$

٢) إذا كان ص = أ - ٩ وكان ص $\propto \frac{١}{س^{٢}}$ وكان أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد العلاقة بين ص، ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١

الحل: ص = أ ـ ٩، ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$ ⟵ ص = $\frac{م}{س^{٢}}$ ⟵ ص = ١٨ ـ ٩ = ٩

عندما س = $\frac{٢}{٣}$ ⟵ ٩ = $\frac{م}{(\frac{٤}{٩})}$ ⟵ م = ٤، ص = $\frac{٤}{س^{٢}}$ عندما س = ١ ⟵ ص = ٤

٣) إذا كان $\frac{٢١س-ص}{٧س-ع}$ = $\frac{ص}{ع}$ فأثبت أن ص ∝ ع

الحل: $\frac{٢١س - ص}{٧س - ع}$ = $\frac{ص}{ع}$ ⟵ ٢١س ع - ص ع = ٧س ص - ع ص ⟵ ٢١س ع = ٧س ص

٧س ص - ٢١س ع = ٠ ⟵ ٧س (٣ع - ص) = ٠ ⟵ (س = ٠) أو (ص = ٣ع) ⟵ ص ∝ ع

٤) إذا كان س^{٤} ص^{٢} - ١٤ س^{٢} ص + ٤٩ = ٠ فاثبت أن ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

الحل: س^{٤} ص^{٢} - ١٤ س^{٢} ص + ٤٩ = ٠ ⟵ (س^{٢} ص - ٧)^{٢} = ٠ ⟵ س^{٢} ص - ٧ = ٠

س^{٢} ص = ٧ ⟵ ص = $\frac{٧}{س^{٢}}$ ⟵ ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$ وهو المطلوب

٥) الربط بالفلك: إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طرديا مع وزنه على القمر (ر)، فإذا كان و$_{١}$ = ١٨٢ كجم، ر$_{١}$ = ٣٥ كجم فأوجد ر$_{١}$ عندما و$_{١}$ = ٣١٢ كجم.

الربط بالفيزياء: إذا كان مقدار السرعة ع التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم/ ث عندما نق = ٣ سم. أوجد ع عندما نق = ٢,٥ سم.